De todas las parejas de números reales cuya suma vale 500, averigua aquella cuyo producto es máximo.

Resolución:

Los números reales buscados serán x e y, sabiendo que, por ejemplo, $y = 500 - x$.

Nos piden maximizar la función producto de los dos números. Llamamos a esta función

$$P(x) = x \cdot (500 - x) = 500x - x^2$$

La función es un polinomio de grado 2, cuya representación gráfica es una parábola. Nos piden averiguar el punto donde alcanza el máximo. Como las ramas de la parábola van hacia abajo (coeficiente de la x^2 negativo), está claro que el máximo se alcanzará en el vértice.

$$V \equiv \left(\frac{-b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a} \right) = \left(\frac{-500}{-2}, 0 - \frac{500^2}{-4} \right) = (250, 62500)$$

El máximo se alcanza para $x = 250$ y el producto de los dos números es 62.500

Podríamos haber resuelto el problema aplicando derivadas. Para ello derivamos la función $P(x) = 500x - x^2$ e igualamos a 0 para calcular los extremos.

$$P'(x) = 500 - 2x \rightarrow 500 - 2x = 0 \rightarrow x = 250$$

$P''(x) = -2 < 0$ y por tanto $x = 250$ es un máximo relativo (en este caso absoluto)

Para calcular el valor del producto, simplemente sustituimos este valor en la función:

$$P(250) = 500 \cdot 250 - 250^2 = 62.500$$