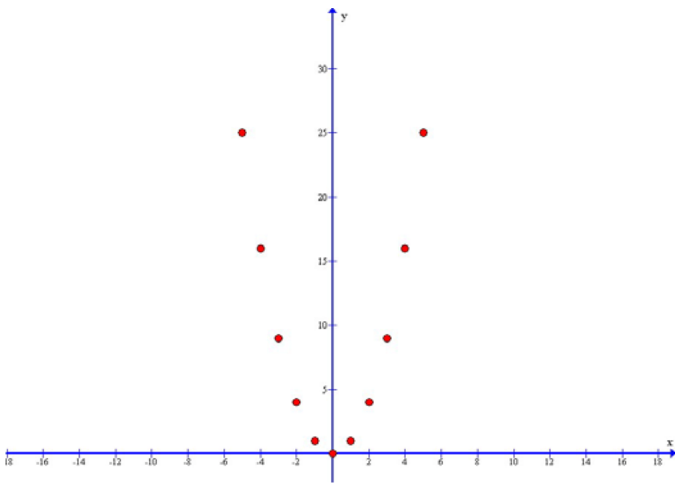
PARÁBOLAS

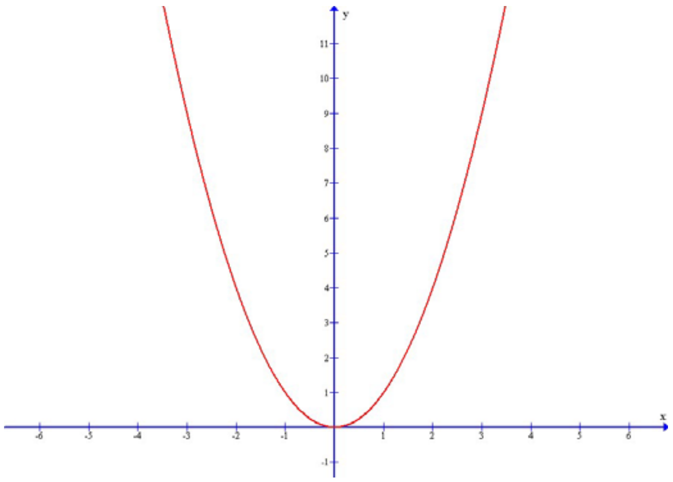
Las funciones polinómicas de grado 2 se representan gráficamente mediante curvas llamadas parábolas. Comenzaremos representando la función $y = x^2$ e iremos "añadiendo" más componentes a esta función hasta llegar a la expresión general de los polinomios de grado 2 que, como sabes, es $y = ax^2 + bx + c$

$y = x^2$ Empezaremos calculando algunos de los puntos de esta función y representándolos gráficamente:

x	y
-5	25
-4	16
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25



Vemos que la curva es simétrica respecto al eje Y, ya que $x^2 = (-x)^2$ y que a pequeños incrementos del valor de x, corresponden también pequeñas variaciones de x^2 (continuidad). Podemos pintar la gráfica de esta función así:

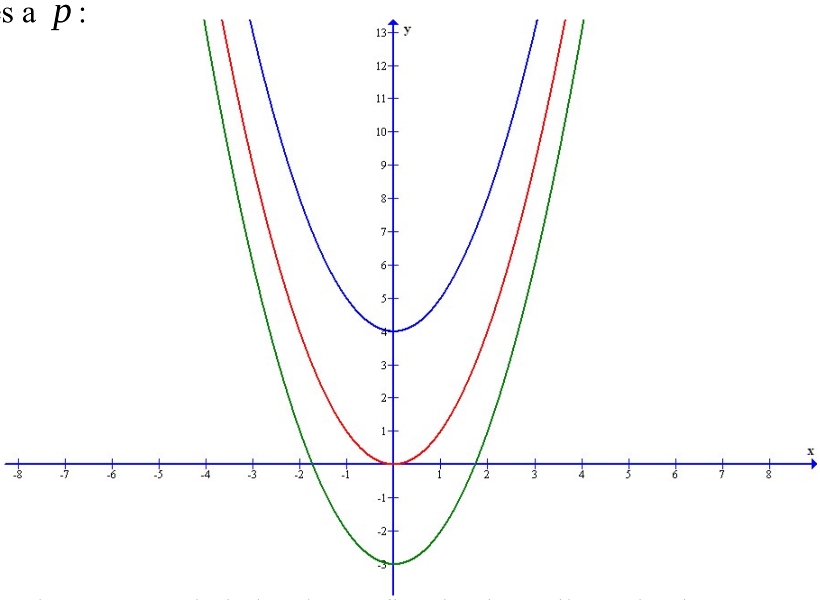


Como ves, esta curva tiene un valor mínimo en el punto (0,0). A este punto lo llamamos ***vértice***. Los valores de x cercanos al vértice son los más significativos de la curva y por ello son los que suelen representarse normalmente.

Traslaciones en la dirección del eje Y.

Vamos a añadir otro elemento a la expresión $y = x^2$. Este elemento va a ser una constante, y así tendremos la función: $y = x^2 + p$. Observemos la tabla de valores resultante dando valores diferentes a p:

x	x^2	x^2+4	x^2-3
-4	16	20	13
-3	9	13	6
-2	4	8	1
-1	1	5	-2
0	0	4	-3
1	1	5	-2
2	4	8	1
3	9	13	6
4	16	20	13



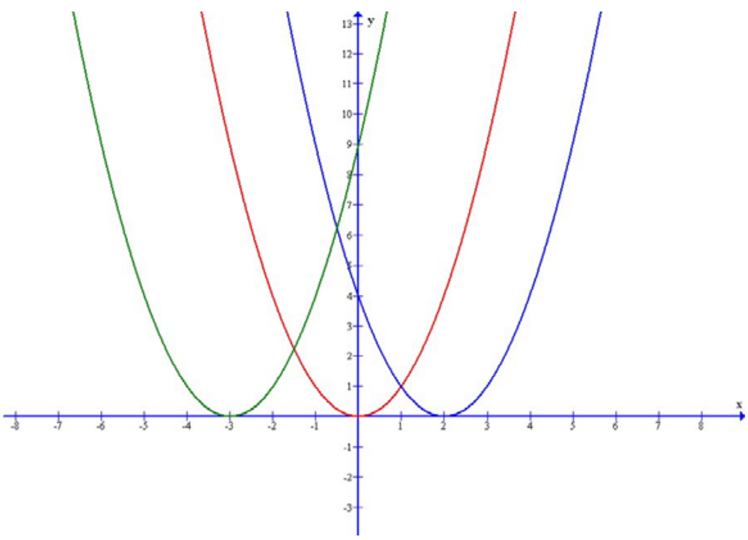
Lo que ha sucedido es que hemos "trasladado" la gráfica hacia arriba o hacia abajo p unidades en la dirección del eje Y . Si p es positivo la gráfica sube, mientras que si es negativo, la gráfica baja. En este caso el vértice se sitúa en el punto (0,p)

◊○◊○◊○◊

Traslaciones en la dirección del eje X.

Analizaremos ahora lo que sucede cuando la función es de la forma $y = (x - m)^2$, comparando nuevamente las tablas:

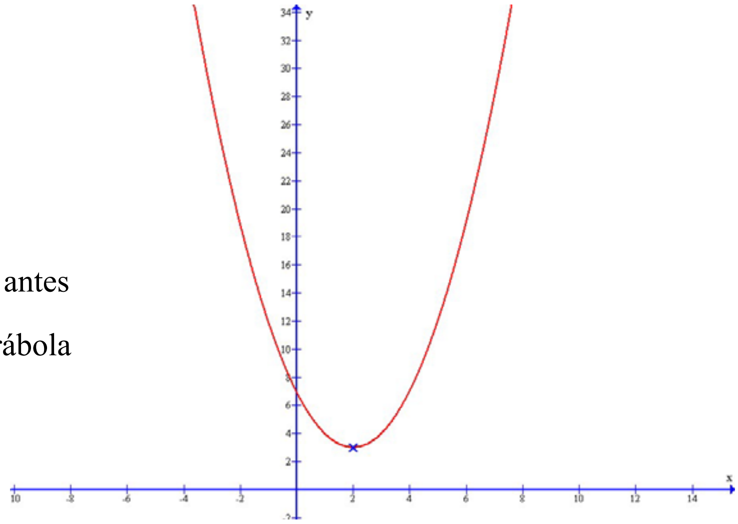
x	x^2	$(x-2)^2$	$(x+3)^2$
-4	16	36	1
-3	9	25	0
-2	4	16	1
-1	1	9	4
0	0	4	9
1	1	9	16
2	4	16	25
3	9	25	36
4	16	36	49



Como ves, lo que ha sucedido es que nuestras parábolas se han desplazado m unidades en la dirección del eje X, siendo su vértice ahora el punto (m,0).

Traslaciones en cualquier dirección

Como ya imaginarás, este tipo de traslaciones hacen que la función sea de la forma $y = (x - m)^2 + p$.



Imagina la función $y = (x - 2)^2 + 3$

El vértice de esta parábola, de acuerdo con la gráfica está en el punto $V(2,3)$.

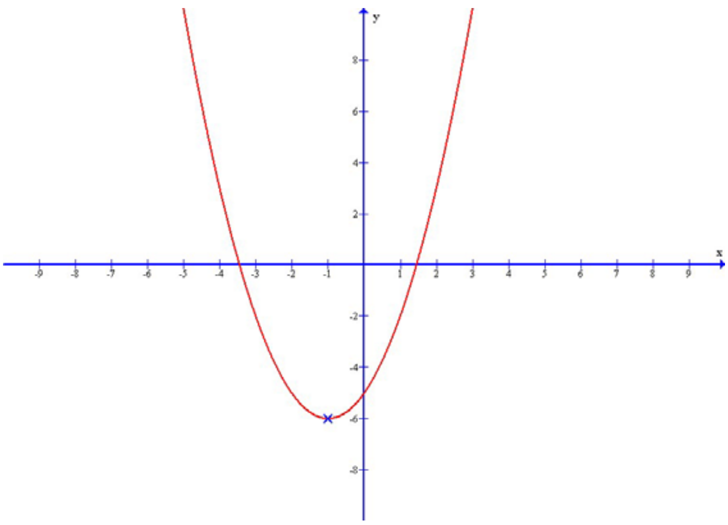
En general, la ecuación que hemos escrito antes $y = (x - m)^2 + p$ corresponde a una parábola cuyo vértice está en el punto $V(m, p)$

◊○◊○◊○◊

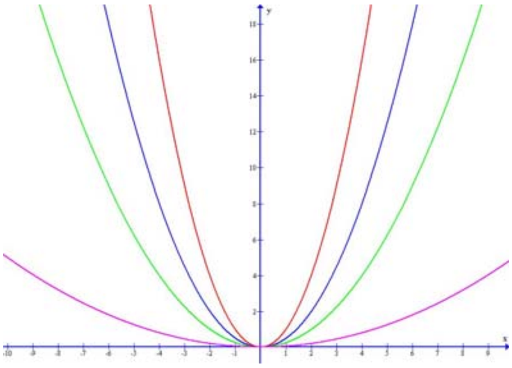
Localización del vértice de una parábola

Dada una parábola cualquiera, vamos a "reescribirla" para que sea de la misma forma que las que hemos estado representando. Por ejemplo $y = x^2 + 2x - 5$. Se trata de llegar a una expresión del tipo $y = (x - m)^2 + p$. Está claro que deberá ser $y = (x + 1)^2 + p$ ya que $2x$ proviene del doble producto de x y de 1. No tenemos más que desarrollar y calcular el valor de p.

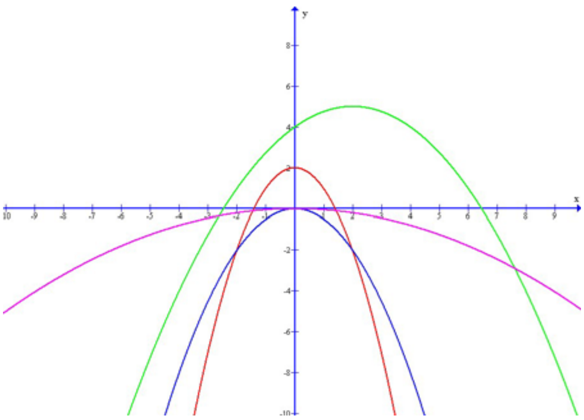
$y = (x + 1)^2 + p = x^2 + 2x + 1 + p$, de donde se deduce que $1 + p = -5$ y así $p = -6$, con lo que nuestra parábola $y = x^2 + 2x - 5$ puede escribirse $y = (x + 1)^2 - 6$ y el vértice estará situado en el punto $V(-1,-6)$



Hasta el momento hemos visto parábolas cuyo término en x^2 tenía siempre coeficiente 1. ¿Qué ocurre cuando este coeficiente es mayor, o menor, o negativo? Observa las siguientes representaciones:



La parábola roja corresponde a x^2. En las demás el coeficiente de x^2va siendo respectivamente **0.5**, **0.25** y **0.05**, con lo que cuanto más pequeño sea este coeficiente, tanto más abierta será la gráfica de la correspondiente parábola. Cuando el coeficiente de la x^2 es mayor que 1, las parábolas van siendo cada vez más pegadas a su eje, más "estrechas" (compruébalo)



Cuando el coeficiente de la x^2 es negativo, las ramas de la parábola van hacia abajo, es decir, tenemos gráficas de la forma:

¿Cómo localizar el vértice en este tipo de parábolas?

Sea la función $y = -x^2 + 8x - 12$. Sacamos factor común el signo "-", así:

$$y = -(x^2 - 8x) - 12 = -(x-4)^2 + p = -x2 + 8x - 16 + p\,.$$

De la misma forma que hacíamos antes, despejamos p así:

$$-16 + p = -12 \Leftrightarrow$$
$$p = -12 + 16 \Leftrightarrow p = 4$$

con lo que la función podemos reescribirla así $y = -(x-4)^2 + 4$ y el vértice estará situado en el punto $V(4,4)$