Ejercicio 04

Representar la función $f(x) = x \cdot e^{-x}$ calculando sus elementos principales.

Paso 1: Dominio de la función

La función dada está bien definida para cualquier valor real, es continua y derivable. Su dominio son todos los números reales, $Domf \ = \Re$

Paso 2: Simetrías

Tenemos que calcular $f(-x)$ y comprobar si es igual a $f(x)$ (en cuyo caso la función será par) o bien a $-f(x)$ (en cuyo caso sería impar).

$f(-x) = (-x) \cdot e^{-(-x)} = -x \cdot e^{x}$ que, como es claro, es distinta tanto de $f(x)$ como de $-f(x)$, con lo que la función dada no presenta simetrías.

Paso 3: Cortes con los ejes

$f(x) = 0$, $x \cdot e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$, ya que $e^{-x} \neq 0$ para cualquier valor real *x*. Tenemos pues el punto de corte $(0,0)$

Paso 4: Estudio de la 1ª derivada (Crecimiento y decrecimiento)

$f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + x \cdot (-1) \cdot e^{-x} = e^{-x} - x \cdot e^{-x} = (1-x) \cdot e^{-x}$

La función será creciente en aquellos puntos en que se verifique $f'(x) > 0$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow (1-x)e^{-x} > 0$. Como la función exponencial $e^{-x} > 0$ siempre, tendremos que $f'(x) > 0 \Leftrightarrow (1-x) > 0 \Leftrightarrow x < 1$, así $f \uparrow$ en $(-\infty, 1)$ y será decreciente en $(1, \infty)$.

Como la función es continua, tendremos un máximo en $x = 1$, puesto que la función pasa de ser creciente a decreciente. No obstante, lo estudiaremos también con la 2ª derivada.

Paso 5: Estudio de la 2ª derivada. (Concavidad, extremos)

$f''(x) = (-1) \cdot e^{-x} + (1-x)(-1)e^{-x} = -e^{-x} - e^{-x} + x \cdot e^{-x} = (x-2) \cdot e^{-x}$

Para $x=1$, que es el punto que anulaba a la 1ª derivada, $f''(1)=(1-2)\cdot e^{-1}=-e^{-1}<0$, lo que nos dice que en $x=1$ se alcanza un máximo.

El punto será el $\left(1,\dfrac{1}{e}\right)$ (para calcular este punto no tienes mas que sustituir el valor de $x=1$ en la función). Vamos a estudiar el signo de la 2ª derivada para ver la concavidad:

Como $e^{-x}>0$ siempre, el signo de f'' dependerá sólo de $x-2$, luego tendremos que

*) si $x>2$ la función será cóncava hacia arriba

*) si $x<2$ la función será cóncava hacia abajo.

*) Si $x=2$ $f''(2)=0$, y así tendré que $x=2$ es un punto de inflexión, ya que $f'''(2)\neq 0$ (compruébalo calculando la 3ª derivada de la función).

Paso 6: Asíntotas.

Asíntotas horizontales: Estudiemos qué pasa cuando $x\to\pm\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}(x\cdot e^{-x})=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^{x}}=0$, luego $y=0$ es una asíntota horizontal

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x\cdot e^{-x})=\lim_{x\to\infty}(-x\cdot e^{x})=-\infty$$

Con todos los elementos calculados, dibujamos la gráfica: