

Representar gráficamente la función  $f(x) = \frac{2}{x^2 - 4}$

**Paso 1:** Dominio de la función

La función es un cociente, por tanto el dominio serán todos aquellos puntos que no anulen al denominador. Así:

$$\text{Dom}f = \{x \in \mathbb{R} \ni x^2 - 4 \neq 0\}. \text{ Como } x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2, \text{ podemos concluir que}$$
$$\text{Dom}f = \mathbb{R} - \{-2, 2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$$

**Paso 2:** Simetrías

Recordemos que la función será PAR cuando  $f(-x) = f(x)$  y será IMPAR cuando  $f(-x) = -f(x)$

$$f(-x) = \frac{2}{(-x)^2 - 4} = \frac{2}{x^2 - 4} = f(x), \text{ por lo que la función es PAR (simétrica respecto al eje OY)}$$

**Paso 3:** Cortes con los ejes

Con el eje OY: Tendremos que hacer  $x=0$ , y así  $f(0) = \frac{2}{0-4} = -\frac{1}{2}$ . Punto de corte

$$\left(0, -\frac{1}{2}\right)$$

Con el eje OX: Hacemos  $f(x)=0$  y planteamos la ecuación.

$$0 = \frac{2}{x^2 - 4}$$

que evidentemente no tiene solución ya que el numerador es distinto de 0 siempre.

**Paso 4:** Estudio de la 1ª derivada (Crecimiento y decrecimiento)

$$f'(x) = \frac{0 \cdot (x^2 - 4) - 2 \cdot (2x - 0)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 4)^2}$$

Hemos de estudiar el signo de esta función. Donde la primera derivada sea positiva la función será creciente y donde sea negativa la función será decreciente.

El denominador de la 1ª derivada es siempre positivo, ya que está elevado al cuadrado, luego el signo de la 1ª derivada y por tanto el crecimiento de la función, dependerá exclusivamente del signo del numerador.

$f \uparrow$  cuando  $f' > 0$ .  $f' > 0 \Leftrightarrow -4x > 0 \Leftrightarrow x < 0$ , luego  $f$  será creciente en  $(-\infty, 0)$

$f \downarrow$  cuando  $f' < 0$ .  $f' < 0 \Leftrightarrow -4x < 0 \Leftrightarrow x > 0$ , luego  $f$  será decreciente en  $(0, +\infty)$

Si la  $f$  es creciente hasta llegar a 0 y decreciente a partir de ese punto, en  $x=0$  (que es un punto del dominio) tendremos un máximo. (lo comprobaremos con la 2ª derivada)

**Paso 5:** Estudio de la 2ª derivada. (Concavidad, extremos)

$$f''(x) = \frac{-4 \cdot (x^2 - 4)^2 - (-4x) \cdot 2(x^2 - 4) \cdot 2x}{(x^2 - 4)^4} = \frac{-4(x^2 - 4) + 16x^2}{(x^2 - 4)^3} = \frac{12x^2 + 16}{(x^2 - 4)^3}$$

Recordemos que la función es cóncava hacia abajo ( $\cap$ ) cuando  $f'' < 0$  y es cóncava hacia arriba ( $\cup$ ) cuando  $f'' > 0$ . En nuestro caso se trata de estudiar el signo de la expresión

$\frac{12x^2 + 16}{(x^2 - 4)^3}$ . El numerador siempre es positivo, luego el signo de la 2ª derivada dependerá

sólo del signo del denominador. Estudiemos el signo de  $(x^2 - 4)^3$ . Las raíces de este polinomio son  $\pm 2$ . Construimos una tabla para estudiar los signos:

	$-\infty$	$-2$	$2$	$\infty$
$(x+2)$	-	+	+	
$(x-2)$	-	-	+	
$(x^2 - 4)^3$	+	-	+	
		$\cup$	$\cap$	$\cup$
$f(x)$		Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba

Comprobemos qué sucede con el punto  $x=0$ , que era el que anulaba a la 1ª derivada.

$$f''(0) = \frac{16}{(-4)^3} = \frac{16}{-64} < 0, \text{ luego es un } x=0 \text{ es un máximo, como ya sabíamos.}$$

**Paso 6:** Asíntotas

Asíntotas horizontales: Estudiemos qué pasa cuando  $x \rightarrow \pm\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2 - 4} = 0. \text{ De la misma forma tenemos que } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^2 - 4} = 0.$$

Por tanto la recta  $y = 0$  es una asíntota horizontal.

Asíntotas verticales: Los puntos que pueden causar problemas son los que no pertenecen al dominio de la función, en nuestro caso  $x = \pm 2$

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{x^2 - 4}$  Recordemos que un límite existe cuando existen los dos límites laterales y coinciden. Así estudiaremos dos límites:

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2}{x^2 - 4} = +\infty$  (Valores más grandes que 2 al cuadrado son valores mayores que 4 y por tanto el denominador tiende a 0 pero con valores siempre positivos)

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2}{x^2 - 4} = -\infty$  (Valores más pequeños que 2 al cuadrado son valores menores que 4 y por tanto el denominador tiende a 0 pero con valores siempre negativos)

Pasa exactamente lo mismo en el caso de que  $x \rightarrow -2$

Con todos estos datos procedemos a pintar la función:

