

RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES.

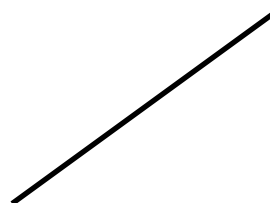
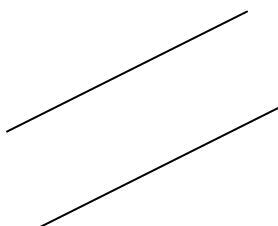
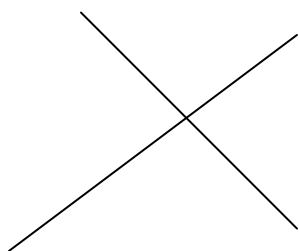
Empezaremos por un sistema de ecuaciones 2×2 , es decir, dos ecuaciones con dos incógnitas.

Un sistema de ecuaciones 2×2 es una expresión del siguiente tipo

$$\begin{cases} a \cdot x + b \cdot y = c \\ a' \cdot x + b' \cdot y = c' \end{cases}$$

donde los coeficientes de x e y y los términos independientes son números reales, es decir, $a, b, a', b', c, c' \in \mathfrak{R}$.

Resolver el sistema es **encontrar los valores de x e y que verifican simultáneamente las dos ecuaciones**. Recordemos sin embargo que no siempre un sistema de ecuaciones tiene solución. De hecho, cada una de las ecuaciones del sistema representa una recta en el plano y dos rectas en el plano pueden estar de 3 formas diferentes: pueden cortarse en un punto, pueden ser paralelas o pueden ser coincidentes.



<p>Rectas que se cortan en un punto \Rightarrow una sólo solución. Hablamos de un sistema compatible determinado.</p> $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$	<p>Rectas paralelas \Rightarrow no existe solución. Hablamos de un sistema incompatible.</p> $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$	<p>Rectas coincidentes: infinitas soluciones. Hablamos de un sistema compatible indeterminado.</p> $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$
--	--	--

Cuadro 1.

Un sistema de ecuaciones puede resolverse de varias formas diferentes: por **reducción, igualación, sustitución y gráficamente**. Antes de empezar con el método que hayamos elegido, habremos comprobado que el sistema tiene solución con los cuadros anteriores.

Método de reducción:

Como su nombre indica, se trata de reducir el sistema 2x2 a una sola ecuación. Se consigue igualando los coeficientes de una de las dos incógnitas (normalmente la que menos operaciones requiera) y restando las dos ecuaciones.

$$\begin{cases} a \cdot x + b \cdot y = c \\ a' \cdot x + b' \cdot y = c' \end{cases}$$

Elegimos una incógnita, por ejemplo la x. Para conseguir que los coeficientes de la x sean iguales en la primera y en la segunda ecuación multiplico la primera por el coeficiente de la segunda y viceversa. Así:

$$\begin{cases} a \cdot a' \cdot x + b \cdot a' \cdot y = c \cdot a' \\ a' \cdot a \cdot x + b' \cdot a \cdot y = c' \cdot a \end{cases}$$

Ahora resto las dos expresiones. Como $aa' = a'a$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} a \cdot a' \cdot x + b \cdot a' \cdot y = c \cdot a' \\ -a' \cdot a \cdot x - b' \cdot a \cdot y = -c' \cdot a \end{cases} \\ \hline 0 + (b \cdot a' \cdot y - b' \cdot a \cdot y) = (c \cdot a' - c' \cdot a) \end{array}$$

Una vez que ya he eliminado una incógnita, en este caso la “x”, agrupo todos los términos que lleven “y” y despejo. Así:

$$y \cdot (b \cdot a' - b' \cdot a) = (c \cdot a' - c' \cdot a)$$

$$y = \frac{(c \cdot a' - c' \cdot a)}{(b \cdot a' - b' \cdot a)}$$

lo cual funciona siempre que el denominador de la fracción sea distinto de 0 (recuerda que no podemos dividir por 0). Esto lo hemos asegurado porque el sistema tiene solución y, por lo tanto, $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$

Ya tenemos la “y”. Sustituimos en cualquiera de las ecuaciones del sistema y obtenemos la “x”.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 5x + 3y = 7 \end{cases}$$

Comprobamos que el sistema de ecuaciones tiene solución aplicando las propiedades vistas en el cuadro 1:

$\frac{a}{a'} = \frac{3}{5}$ $\frac{b}{b'} = \frac{2}{3}$ y como $\frac{3}{5} \neq \frac{2}{3}$ ($3 \cdot 3 \neq 2 \cdot 5$) podemos concluir que el

sistema de ecuaciones es compatible determinado, tendrá una única solución.

Aplicamos el método de reducción para resolverlo:

Tal como hemos hecho teóricamente, elegimos la “x” para eliminarla de las 2 ecuaciones. El coeficiente de la “x” en la primera ecuación es 3 y en la segunda es 5, por lo que multiplicaremos la primera ecuación por 5 y la segunda por 3. Así:

$$\begin{cases} 3 \cdot 5x + 2 \cdot 5y = 4 \cdot 5 \\ 5 \cdot 3x + 3 \cdot 3y = 7 \cdot 3 \end{cases}$$

Hacemos las operaciones indicadas

$$\begin{cases} 15x + 10y = 20 \\ 15x + 9y = 21 \end{cases}$$

Y ahora restamos las 2 ecuaciones (o lo que es lo mismo cambiamos de signo una de ellas y sumamos)

$$\begin{cases} 15x + 10y = 20 \\ -15x - 9y = -21 \end{cases}$$

$$\{0x + (10 - 9)y = 20 - 21$$

$$y = -1$$

y sustituimos el valor obtenido en cualquiera de las ecuaciones de nuestro sistema para conseguir la “x”

$$3x + 2y = 4 \Rightarrow 3x + 2(-1) = 4 \Rightarrow 3x - 2 = 4 \Rightarrow$$

$$3x = 4 + 2 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{3} = 2$$

Método de sustitución:

Elegimos la incógnita que más fácilmente pueda despejarse en una de las ecuaciones y la sustituiremos en la otra ecuación:

$$\begin{cases} a \cdot x + b \cdot y = c \\ a' \cdot x + b' \cdot y = c' \end{cases}$$

Vamos a despejar la “y” en la primera ecuación:

$$b \cdot y = c - a \cdot x$$

$$y = \frac{c - a \cdot x}{b}$$

Ahora sustituimos el valor de “y” en la segunda ecuación:

$$\begin{aligned}
 a' \cdot x + b' \cdot \frac{c - a \cdot x}{b} &= c' \\
 b \cdot a' \cdot x + b' \cdot (c - a \cdot x) &= b \cdot c' \\
 b \cdot a' \cdot x + b' \cdot c - b' \cdot a \cdot x &= b \cdot c' \\
 b \cdot a' \cdot x - b' \cdot a \cdot x &= b \cdot c' - b' \cdot c \\
 x \cdot (b \cdot a' - b' \cdot a) &= b \cdot c' - b' \cdot c \\
 x &= \frac{b \cdot c' - b' \cdot c}{b \cdot a' - b' \cdot a}
 \end{aligned}$$

Si te fijas, este valor de “x” es válido siempre que el denominador sea distinto de 0, pero al igual que en el anterior método esto podemos asegurarlo porque $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 5x + 3y = 7 \end{cases}$$

Despejamos la “y” en la primera ecuación:

$$2y = 4 - 3x \Rightarrow y = \frac{4 - 3x}{2}$$

y sustituimos el valor de “y” en la segunda ecuación:

$$\begin{aligned}
 5x + 3y &= 7 \Rightarrow \\
 5x + 3 \frac{4 - 3x}{2} &= 7 \Rightarrow \\
 10x + 3(4 - 3x) &= 14 \Rightarrow \\
 10x + 12 - 9x &= 14 \Rightarrow \\
 10x - 9x &= 14 - 12 \Rightarrow \\
 x &= 2
 \end{aligned}$$

Una vez obtenido el valor de “x”, sustituimos en la expresión de “y” que hemos despejado al principio:

$$y = \frac{4 - 3x}{2} = \frac{4 - 3 \cdot 2}{2} = \frac{4 - 6}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Método de igualación:

Elegiremos la incógnita que más fácilmente pueda despejarse en AMBAS ecuaciones y la despejaremos. Una vez hecho esto igualaremos los dos resultados. Supongamos que esa incógnita es la “x”

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

En la primera ecuación: $x = \frac{c - by}{a}$ y en la segunda ecuación: $x = \frac{c' - b'y}{a'}$. Como

ambas expresiones han de ser iguales:

$$\begin{aligned} \frac{c - by}{a} &= \frac{c' - b'y}{a'} \\ a'(c - by) &= a(c' - b'y) \\ a'c - a'by &= ac' - ab'y \\ ab'y - a'by &= ac' - a'c \\ y(ab' - a'b) &= ac' - a'c \\ y &= \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b} \end{aligned}$$

que es el mismo valor que habíamos obtenido para la “y” con el primer método (puedes comprobarlo como ejercicio. Para ello recuerda que $m - n = - (n - m)$)

Ejemplo:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 5x + 3y = 7 \end{cases}$$

Despejamos las “x” en ambas ecuaciones. De la primera tendremos

$$3x = 4 - 2y \Rightarrow x = \frac{4 - 2y}{3}$$

y de la segunda

$$5x = 7 - 3y \Rightarrow x = \frac{7 - 3y}{5}$$

Igualamos ambas expresiones:

$$\begin{aligned}\frac{7-3y}{5} &= \frac{4-2y}{3} \Rightarrow 3(7-3y) = 5(4-2y) \Rightarrow \\ 21-9y &= 20-10y \Rightarrow \\ 10y-9y &= 20-21 \Rightarrow \\ y &= -1\end{aligned}$$

Y sustituyendo en cualquiera de las expresiones de la "x"

$$x = \frac{7-3y}{5} = \frac{7-3(-1)}{5} = \frac{7+3}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

Representación gráfica:

Para representar gráficamente una recta en el plano basta con calcular dos puntos por los que pasa y unirlos. Se hace lo mismo con las dos rectas y sobre el mismo sistema de ejes coordenados y tendremos el sistema resuelto.

Recuerda que antes de empezar a resolver un sistema de ecuaciones, debes comprobar si tiene o no solución utilizando las condiciones vistas en la primera hoja.

Ir al principio