Representación gráfica de funciones

Para representar gráficamente una función hemos de calcular sus “elementos principales”, siguiendo los siguientes pasos:

1.- Dominio y recorrido de la función

2.- Simetrías y periodicidad

3.- Cortes con los ejes

4.- Estudio de la 1ª derivada

5.- Estudio de la 2ª derivada

6.- Asíntotas

7.- Valores significativos

Dependiendo de la función y de las características que vayamos calculando (dominio, simetrías, crecimiento, etc…), no siempre será necesario realizar todos los pasos.

1.- ***Dominio*** y ***recorrido*** de la función.

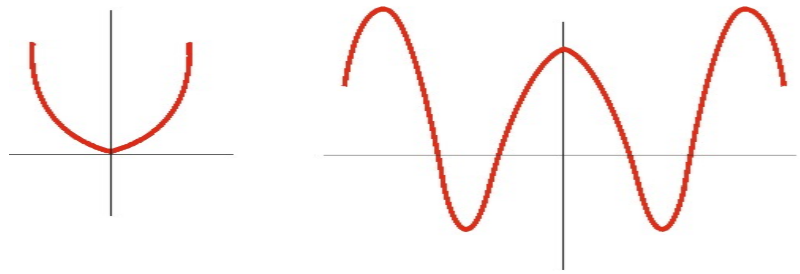
El dominio de una función son todos los valores que hacen que la función exista, que se pueda calcular: $Dom f(x) = \{x \in \Re \;\; | \;\; \exists\, f(x)\}$. La existencia o no de la función dependerá de la naturaleza de ésta (raíces, cocientes, logaritmos…)

El recorrido de la función son todos los valores que ésta puede tomar.

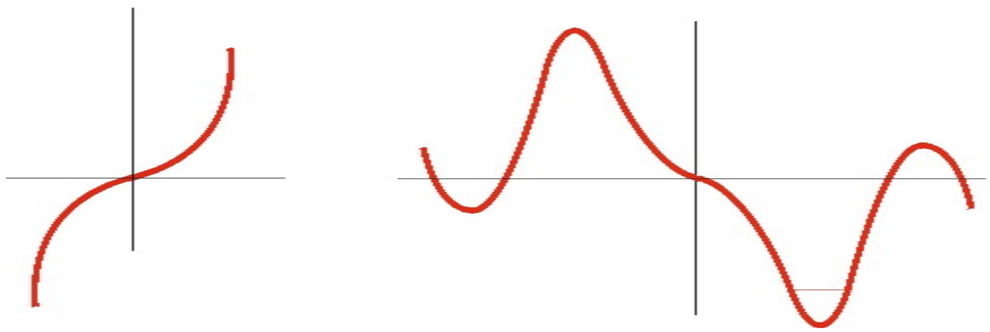
2.- ***Simetrías***.

Estudiaremos cuándo la función es simétrica respecto al eje Y (en cuyo caso diremos que la función es ***par***) y cuándo es simétrica respecto al Origen (entonces diremos que es ***impar***)

*) Si se verifica que $f(-x) = f(x)$ la función es PAR (simétrica respecto al eje Y significa que si “doblásemos” la gráfica siguiendo ese eje, coincidirían la parte positiva y la negativa de las X). Aquí tienes dos ejemplos de funciones pares:



*) Si se verifica que $f(-x) = -f(x)$, la función es IMPAR (simétrica respecto al punto Origen). Las siguientes funciones son impares:



ⓘ Observa que una función puede no ser ni PAR ni IMPAR

Cuando las funciones así lo requieran estudiaremos también su periodicidad. Una función es periódica de periodo P cuando se verifica que $f(x+P) = f(x)$

3.- ***Cortes*** con los ejes coordenados.

Cortes con el eje OX: Haremos $y = 0$ y resolveremos la ecuación.

Cortes con el eje OY: Haremos $x = 0$ y sustituiremos en la función para calcular y

4.- Estudio de la ***1ª derivada***.

En este apartado se estudia el crecimiento de la función, así como los extremos relativos (máximos y mínimos) de la misma. Así pues derivaremos la función $f(x)$ y calcularemos:

*) La función será *creciente* en los puntos en los que $f'(x) > 0$ y lo escribiremos $f \uparrow$

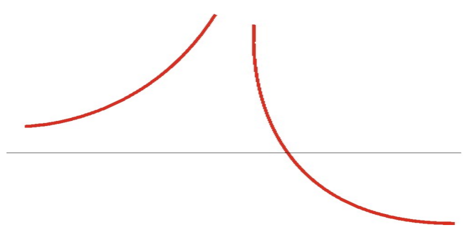
*) La función será *decreciente* en los puntos en los que $f'(x) < 0$ y lo escribiremos $f \downarrow$

*) Los *extremos* estarán en los puntos en los que $f´(x)=0$ y veremos si son máximos o mínimos con la segunda derivada. (También podemos verlo con la 1ª derivada y el crecimiento si la función es continua)

5.- Estudio de la ***2ª derivada***

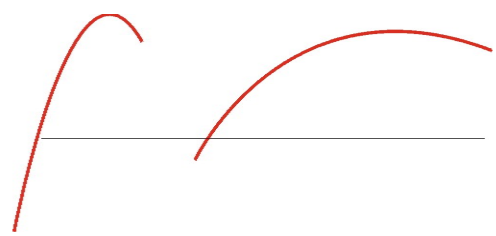
Calculamos la segunda derivada (derivar la 1ª derivada) y estudiamos qué es lo que sucede en los puntos que anulaban a la 1ª derivada. De esta forma, si $f´´(x_0)>0$, tendremos un *mínimo* en x_0. Si $f´´(x_0)<0$ lo que tendremos será un *máximo* en dicho punto.

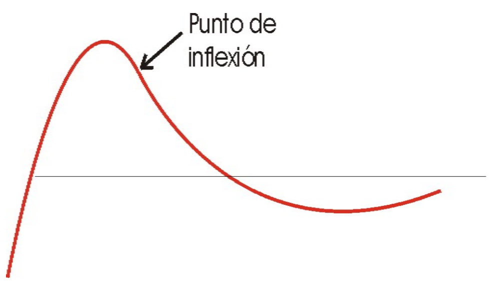
La segunda derivada estudia también la concavidad de la función. Así:



*) La función será *cóncava hacia arriba* en los puntos en los que $f´´(x)>0$

*) La función será *cóncava hacia abajo* en los puntos en los que $f´´(x)<0$





En aquellos puntos en los que $f´´=0$, podrían aparecer los llamados *puntos de inflexión*, que son aquellos en los que la función cambia la concavidad.

6.- *Asíntotas*

Son líneas a las que la función se aproxima infinitamente pero sin llegar a tocar. Se calculan estudiando los siguientes límites, según que las asíntotas sean verticales, horizontales u oblicuas:

*) Diremos que la recta $x = a$ es una asíntota vertical cuando se verifique que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$$

*) Diremos que la recta $y = b$ es una asíntota horizontal cuando se verifique que

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b$$

*) La recta $y = mx + n \quad (m \neq 0)$ será una asíntota oblicua cuando se verifique que:

$$\lim_{x \to \infty}(f(x) - mx - n) = 0\text{, siendo} \qquad m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \; , \qquad \text{y} \qquad n = \lim_{x \to \infty}(f(x) - mx)$$