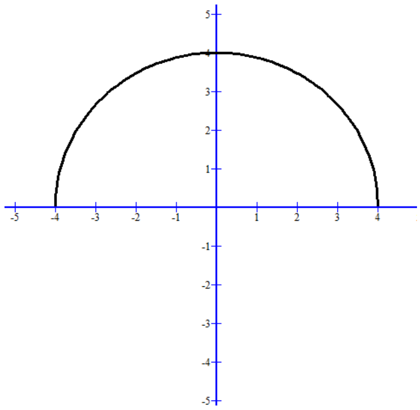
APLICACIONES DE LAS INTEGRALES II



1. Calcular el volumen de una esfera de radio 4.

El volumen pedido será el resultado del giro alrededor del eje X de una circunferencia de radio 4. La ecuación de dicha cónica es $x^2 + y^2 = 4^2$, de donde $y^2 = 4^2 - x^2$

Como $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$, podríamos plantear que

$$V = \pi \int_{-4}^{4} (4^2 - x^2)dx = 2\pi \int_0^4 (4^2 - x^2)dx = 2\pi \left[16x - \frac{x^3}{3}\right]_0^4 = 2\pi \left[64 - \frac{64}{3}\right] = \frac{256}{3}\pi$$

Si en vez de radio 4, hubiese sido radio R cualquiera, hubiésemos llegado a la fórmula que nos da el volumen de la esfera: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

En efecto,

$$V = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)dx = 2\pi \int_0^R (R^2 - x^2)dx = 2\pi \left[R^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^R = 2\pi \left[R^3 - \frac{R^3}{3}\right] = 2\pi \frac{2R^3}{3}$$

$$= \frac{4}{3}\pi R^3$$

2. Calcular el volumen del cuerpo engendrado por la rotación en torno al eje OX de la curva $y = sen^2x$ entre $x = 0$ y $x = \pi$

$$V = \pi \int_0^\pi sen^4x dx = \pi \int_0^\pi (sen^2x)^2 dx = \pi \int_0^\pi \left(\frac{1 - cos2x}{2}\right)^2 dx = \frac{\pi}{4}\int_0^\pi (1 - cos2x)^2 dx =$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[\int_0^\pi (1 - 2cos2x + cos^2 2x)dx\right] = \frac{\pi}{4}[x - sen2x]_0^\pi + \frac{\pi}{4}\int_0^\pi cos^2 2x dx$$

Vamos a resolver aparte esta última integral y luego agrupamos resultados:

$$\int_0^\pi cos^2 2x dx = \int_0^\pi \frac{1 + cos4x}{2} dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{sen4x}{8}\right]_0^\pi$$

Por tanto, agrupando:

$$V = \frac{\pi}{4}\left[x - sen2x + \frac{x}{2} + \frac{sen4x}{8}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{4}\left[\pi - sen2\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{sen4\pi}{8}\right] = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi^2}{8}\ u.a.$$