INTEGRACIÓN RACIONALES (III)

1. $\int \frac{x-5}{x^3+3x^2-4}dx$ Como en ejercicios anteriores, calculamos primero las raíces del denominador. Es fácil ver que x=1 es una raíz, con lo que si aplicamos ahora Ruffini, tenemos que $x^3+3x^2-4=(x-1)(x^2+4x+4)=(x-1)(x+2)^2$ Nos ha aparecido una raíz doble. En estos casos, la forma de descomponer la fracción algebraica cambia y hay que escribir, para cada raíz múltiple, tantas fracciones simples como nos indique la multiplicidad de la raíz y con todos los exponentes posibles en el denominador entre 1 y la multiplicidad (en este caso 2). En nuestro caso,

	1	3	0	-4
1		1	4	4
	1	4	4	0

$$\frac{x-5}{x^3+3x^2-4}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}$$

Desarrollamos la expresión, haciendo común denominador

$$\frac{x-5}{x^3+3x^2-4}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}=\frac{A(x+2)^2+B(x-1)(x+2)+C(x-1)}{(x-1)(x+2)^2}$$

Igualamos los numeradores y así: $x-5= A(x+2)^2+B(x-1)(x+2)+C(x-1)$

A partir de aquí, podemos desarrollar y plantear el sistema de ecuaciones como en anteriores ejercicios o resolverlo mediante este otro sistema. Como los dos polinomios deben ser iguales para cualquier valor de "x", en particular lo serán para $x=1, x=-2$ que son los valores que anulan al denominador y otro valor cualquiera que por ejemplo puede ser $x=0$. No hace falta dar valores muy extraños, cuanto más sencillo mejor. De esta forma,

$$Para\ x=1 \rightarrow\ 1-5=A(1+2)^2+B\cdot 0+C\cdot 0 \rightarrow -4=9A \Rightarrow A=\frac{-4}{9}$$

$$Para\ x=-2 \rightarrow\ -2-5=A\cdot 0+B\cdot 0+C(-3) \Rightarrow -3C=-7 \Rightarrow C=\frac{7}{3}$$

Finalmente para $x=0\ \rightarrow 0-5=4A-2B-C\ \Rightarrow B={}^4\!/_9$

Con estos resultados planteamos de nuevo la integral:

$$\int \frac{x-5}{x^3+3x^2-4}dx=\int \frac{{}^{-4}\!/_9}{x-1}dx+\int \frac{{}^4\!/_9}{x+2}dx+\int \frac{{}^7\!/_3}{(x+2)^2}dx=$$

$$\frac{-4}{9}\ln(x-1)+\frac{4}{9}\ln(x+2)-\frac{{}^7\!/_3}{x+2}+K$$