INTEGRACIÓN RACIONALES (I)

1. $\int \frac{x^2+2}{x^3+x^2-2x}dx$ De nuevo, primero calculamos las raíces del denominador. En este caso resulta sencillo, $x^3+x^2-2x = x(x^2+x-2) = x(x-1)(x+2)$

De esta forma, puedo escribir

$$\frac{x^2+2}{x^3+x^2-2x} = \frac{x^2+2}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$$

Desarrollando:

$$\frac{x^2+2}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2} = \frac{A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x+2)}$$

$$= \frac{A(x^2+x-2) + B(x^2+2x) + C(x^2-x)}{x(x-1)(x+2)}$$

$$= \frac{x^2(A+B+C) + x(A+2B-C) - 2A}{x(x-1)(x+2)}$$

Igualando ahora los numeradores tendremos

$$x^2+2 = x^2(A+B+C) + x(A+2B-C) - 2A$$

Y así podemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$A+B+C = 1$$

$$A+2B-C = 0$$

$$-2A \qquad = 2$$

Resolvemos el sistema. Despejando en la última ecuación: $A = -1$. Sustituimos

$$\left.\begin{array}{l} -1+B+C = 1 \\ -1+2B-C = 0 \end{array}\right\}$$

Sumando ambas ecuaciones tenemos que $-2+3B = 1 \Rightarrow B = 1$

Y finalmente despejamos *C=1*

Obtenemos así nuestras incógnitas que son $A = -1, B = 1\ y\ C = 1$. De esta forma podemos escribir:

$$\frac{x^2+2}{x(x-1)(x+2)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2} \Rightarrow$$

$$\int \frac{x^2+2}{x(x-1)(x+2)}dx = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2}\right) dx =$$

$$= \int \frac{-1}{x}dx + \int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{1}{x+2}dx = -\ln x + \ln(x-1) + \ln(x+2) + K$$